

USO DE SMARTPHONES Y DE GEOGEBRA PARA EL ESTUDIO DE CONCEPTOS DE ÓPTICA Y DE MATEMÁTICA

Costa, Viviana Angélica y Gallego Sagastume, Juana Inés

IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, vacosta@ing.unlp.edu.ar

INTRODUCCIÓN

En general en carreras universitarias de ciencias e ingeniería los contenidos de matemática y de física se estudian en forma aislada, descontextualizada, mecánica y sin sentido, provocando desmotivación en los estudiantes y aprendizajes estancos. Estas son problemáticas comúnmente asociadas a pedagogías tradicionales de enseñanza y a las rígidas organizaciones curriculares propias de los sistemas universitarios. De esta manera se impide, muchas veces, implementar innovaciones educativas en las aulas que contemplen el uso de tecnologías de la comunicación y de la información por un lado y la interdisciplinariedad, por otro.

Con el objetivo de romper con el paradigma de enseñanza tradicional, se presenta una actividad didáctica a un grupo de estudiantes de un curso de Matemática C de la Facultad de Ingeniería de la UNLP (FI UNLP).

METODOLOGÍA

La actividad propone estudiar conceptos de Óptica y de Álgebra Lineal en forma conjunta, organizando el estudio de los contenidos a partir de buscar respuestas a una pregunta:

¿Qué relación existe entre la intensidad luminosa que llega a un receptor y la distancia a la que se encuentra de la fuente?

Esta pregunta parte de la noción evidente que a medida que nos alejamos de una fuente luminosa, la intensidad disminuye. La propuesta para los alumnos es investigar sobre cuál es el modelo funcional que las relaciona y verificarlo experimentalmente. Para buscar respuesta a la pregunta, los estudiantes, asistidos por profesores de matemática y de física, modelan matemáticamente un conjunto de datos experimentales que ellos mismos obtienen en un laboratorio de física, mediante el uso de sensores que disponen los Smartphones. Luego modelan matemáticamente esos datos y mediante el uso de GeoGebra (Software libre y multiplataforma) realizan un ajuste por el Método de Mínimos Cuadrados (método que estudian previamente desde el enfoque de Álgebra Lineal). Finalmente contrastan lo encontrado matemáticamente con la Ley Física de la Inversa del Cuadrado de la Distancia.

El trabajo se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico que propone introducir en el aula la Enseñanza por Investigación con el objetivo de romper con el contrato didáctico habitual, situando al alumno en el centro del aprendizaje (Chevallard, 2013). Además se sitúa en las líneas de enseñanza de la ciencia que proponen varios investigadores, que afirman que una de las componentes claves de la naturaleza de la ciencia es el análisis de un fenómeno físico con el fin de comprenderlo y describirlo. Proponen en la práctica científica la construcción de un modelo que permita abordar su estudio (Pozo, Pozo y Gómez Crespo, 1998; Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2015; Acevedo-Díaz, García-Carmona, Aragón-Méndez, Oliva-Martínez, 2017; Acevedo, 2017).

La actividad didáctica se implementa en un grupo de 50 alumnos que cursan Matemática C (tercer semestre de las carreras de ingeniería en la FI UNLP).

Los contenidos de esta asignatura son los relativos al Álgebra Lineal y los aspectos principales, tanto metodológicos y didácticos de la misma, pueden encontrarse en Costa y Rossignoli (2017).

La actividad se propone en la última etapa del curso luego de que se han estudiado los siguientes contenidos: sistemas de ecuaciones lineales, matrices, operaciones entre matrices, propiedades y determinante, espacios vectoriales, transformaciones lineales,

diagonalización de matrices y ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden y sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Para analizar el funcionamiento y eficacia de la actividad didáctica se presenta a continuación una descripción de ésta en torno a las preguntas derivadas y a las repuestas parciales construidas por los estudiantes. El análisis completo de esta investigación ha sido publicado en Costa (2018).

DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

En una primera etapa, los alumnos debaten acerca de la pregunta llamada generatriz. Para ello, consultan sobre el tema en diversa bibliografía y a profesores del área de física. Surgen las preguntas derivadas, referentes a las definiciones acerca de la radiación de luz.

La pregunta con la que se inicia la actividad es: *¿Qué relación existe entre la intensidad de la luz emitida por una fuente (luminosidad) y la distancia a la que se encuentra el receptor?*

Esta etapa de la actividad didáctica de investigación bibliográfica ocupa el tiempo de casi toda una clase.

Para la siguiente, el profesor del curso de matemática propone a los alumnos asistir a un laboratorio de física de la facultad para realizar un experimento. El mismo consiste en medir el flujo iluminancia (E) en *luxen* tregados por una fuente puntual, relevada a distintas distancias de la fuente.

Los alumnos se distribuyen en grupos más pequeños para realizar las mediciones. Cada subgrupo obtendrá un conjunto de pares de datos (iluminancia, distancia). Para ello, disponen en una mesa del laboratorio, que ha sido oscurecido, una lámpara pequeña que puede considerarse como una fuente puntual. Luego colocan una cinta métrica sobre la mesa con el cero en la lámpara.

Posteriormente usan los sensores disponibles en sus dispositivos móviles, colocados sobre la cinta métrica y perpendicularmente a la lámpara, miden los valores de la iluminancia a diferentes distancias en intervalos de a 5 centímetros en la parte más próxima y de 10 centímetros a medida que se alejan de la lámpara (Figura 1).

Para usar los sensores de sus dispositivos móviles previamente descargan una aplicación gratuita llamada: *PhysicsToolbox Suite* (Figura 2). Además, esta aplicación permite a los usuarios exportar los datos para su posterior análisis en una hoja de cálculo. En particular el sensor del dispositivo que se utiliza se llama luxómetro y mide los niveles de luz en el ambiente, sirve para ajustar el brillo de la pantalla, para ahorrar batería o es utilizado por aplicaciones que son útiles para los fotógrafos.



Figura 1. Estudiantes realizando el experimento con dispositivos móviles



Figura 2: Aplicación *PhysicsToolbox Suite*

mencionado anteriormente. En GeoGebra, usan el comando Crea Matriz para obtener las matrices del sistema anterior de los datos cargados en la vista de Hoja de Cálculo. Realizan todos los cálculos matriciales en la Vista Algebraica y mediante los comandos Traspone(Matriz) e Inversa(Matriz), resuelven el denominado sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix} K \\ m \end{pmatrix} = (At.A)^{-1} \cdot (At.B), \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & \ln(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln(x_n) \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \vdots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}.$$

Finalmente recordando que $\ln(K)=k$, obtienen los valores de los parámetros. Algún grupo encuentra $m = -1.545$ y $k=e^{4.52}$, presentan entonces el modelo funcional que además grafican en la Vista Algebraica:

$$f(x)=90.58 x^{-1.75}.$$

Parte del proceso en GeoGebra se muestra en la Figura 4.

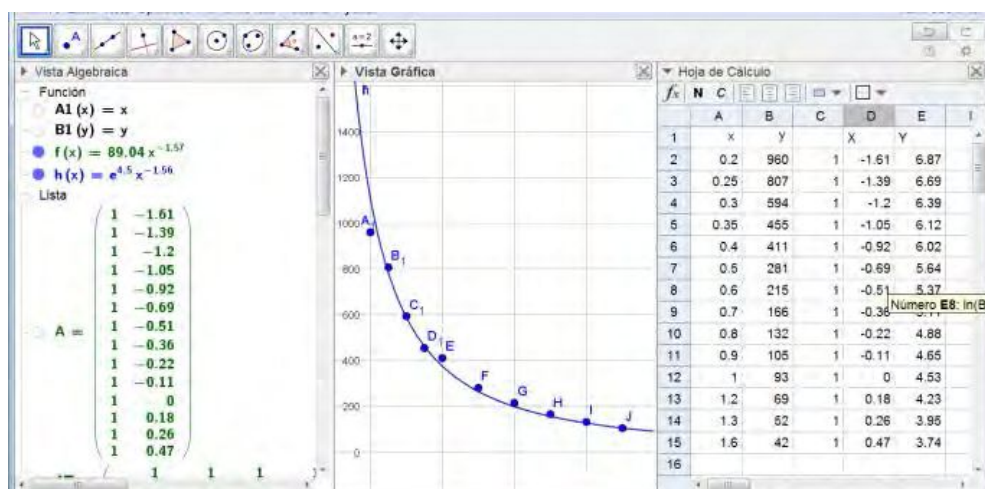


Figura 4: Cálculos en GeoGebra. Vistas Algebraica, Vista Gráfica y Vista Hoja de Cálculo.

Luego calculan los valores de $f(x_i)$ para los x_i , el vector error $(y-f(x))$ y su norma. Usan el comando Suma Errores Cuadrados de GeoGebra aplicado a la lista de puntos del vector error, para obtener el cuadrado de la norma dos, el valor 11.05 .

Concluyen que el modelo potencial encontrado se corresponde en condiciones ideales (laboratorio totalmente oscurecido, sensores calibrados, entre otros) con el de

$$f(x)=k x^{-2}$$

que se corresponde con la Ley Física de la Inversa del Cuadrado.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una actividad didáctica para el estudio del Método de Mínimos Cuadrados conjuntamente con conceptos de Óptica en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Para la búsqueda de respuestas al problema propuesto sobre *¿Qué relación existe entre la intensidad de la luz emitida por una fuente (luminosidad) y la distancia a la que se encuentra el receptor?*, los alumnos participantes realizaron tareas tales como:

- Medir y registrar correctamente datos experimentales.
- Proponer un modelo funcional que ajuste los datos.
- Estudiar un modelo no lineal mediante el Método de Mínimos Cuadrados.
- Analizar datos experimentales mediante el método de Mínimos Cuadrados.
- Validar el modelo funcional encontrado con la teoría física subyacente.

Para llevar a cabo esas tareas los alumnos utilizaron tecnología al alcance de la mayoría de ellos, como son los sensores disponibles en los Smartphones, que les sirvió para medir las magnitudes de luminosidad que emitía una fuente luminosa. Además utilizaron el software matemático GeoGebra para el análisis de los datos obtenidos experimentales.

Estos recursos tecnológicos, dispositivos móviles y software matemático, muchas de las veces son vedados en el aula o incorporados al proceso de estudio en forma forzada. En

cambio, al implementar una actividad didáctica con una pregunta adecuada, el empleo de ellos surge de manera casi natural. Los dispositivos móviles son familiares a la gran mayoría de los jóvenes y permitiría acortar la brecha entre la ciencia como un objeto abstracto de estudio reservado para unos pocos y la ciencia como una apasionante aventura presente en todos los aspectos de la vida.

También, desde el punto de los procesos de estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, la búsqueda de respuestas a la pregunta dada, rompe y provoca en los estudiantes un cambio en sus prácticas habituales del estudio usual propuesto (en general) en los cursos de Álgebra Lineal en los cuales sólo se abordan (usando papel y lápiz) sistemas de dos o tres ecuaciones (como mucho) con dos o tres incógnitas. Donde además, usualmente en el caso de ser el sistema incompatible, no se hace más nada con el problema.

Por último, la misma pregunta generatriz es posible presentarla en otros contextos, incluso en escuela secundaria. En ese caso, el ajuste de los pares de datos sería posible hallarlo utilizando los comandos de Ajuste que dispone GeoGebra, en vez del estudio del Método de Mínimos Cuadrados que requiere del conocimiento de conceptos del Álgebra Lineal. También la pregunta generatriz, podría ser presentada en forma más general y dar lugar al estudio de otros fenómenos físicos que cumplen la misma Ley del Cuadrado Inverso de la Distancia, cuya intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro donde se originan, que tiene su sustento en consideraciones estrictamente geométricas. Por ejemplo, la misma Ley podría ser aplicada a diversos fenómenos: fuentes puntuales de fuerzas de gravitación, campo eléctrico y sonido o radiación. En particular, por ejemplo se podría preguntar si el campo de sonido en una habitación en la cual se coloca un altavoz en el centro, sigue la ley del inverso del cuadrado (Nave, 2005). Esto último, también podría experimentarse utilizando los sensores disponibles en los dispositivos móviles usando el sonómetro. Todos estos son temas de continuo debate en física y de interés en la ciencia, siendo este punto donde radica en parte la actividad didáctica presentada.

ANEXO. BREVE MARCO TEÓRICO DE CONCEPTOS FÍSICOS

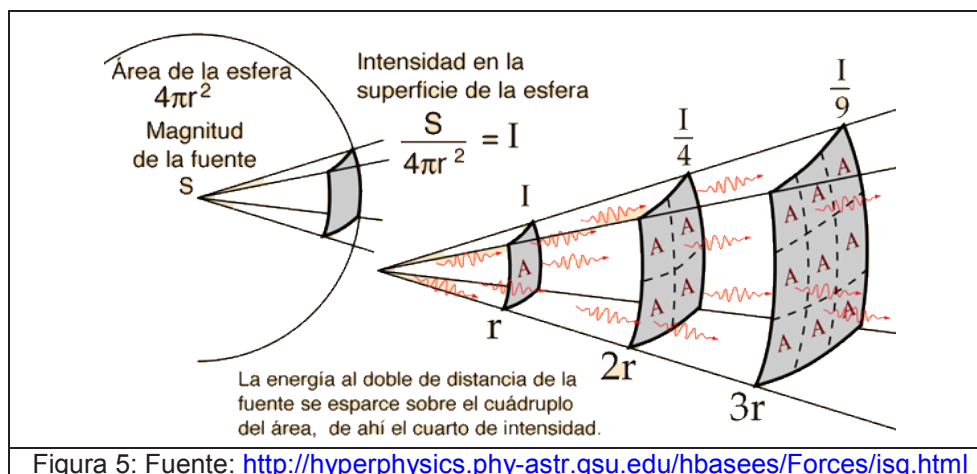
Los contenidos a abordar se corresponden con el Método de Mínimos Cuadrados (contenido curricular de Matemática C) y con los conceptos físicos que subyacen al problema propuesto, que se corresponden con las nociones de Óptica y más en particular con Fotometría. La Radiometría estudia la energía radiante para cualquier longitud de onda y en particular la Fotometría estudia el flujo radiante en la región visible del espectro y tiene como objetivo la evaluación de la energía radiante productora de una sensación visual.

“La intensidad luminosa se refiere a la energía irradiada por cualquier fuente lumínica (lámpara de filamento incandescente, tubo fluorescente, arco entre electrodos de carbono, metales en fusión, etc.), y se mide en watts. La medición en watts no es adecuada para medir la sensación de luminosidad percibida por el ojo humano, en primer lugar porque no toda la energía de una fuente luminosa se convierte en luz visible, y en segundo lugar porque el ojo no es igualmente sensible a todas las longitudes de onda (λ). La cantidad similar al flujo radiante pero que tiene en cuenta esos factores se denomina flujo luminoso (F), y se mide en lúmenes (lm). Un lumen se define como la cantidad de luz emitida por una superficie de $1/60 \text{ cm}^2$ de platino en fusión (alrededor de 1770 o C) y comprendida en un ángulo sólido de un estereorradián (sr). Como ejemplo, una lámpara incandescente de $40W$ tiene un flujo luminoso de unos 500 lm , y un tubo fluorescente de $40W$ tiene uno de 2300 lm .” (Sears, 1960).

Es decir: el flujo luminoso es el flujo radiante *ponderado* por el ojo humano respecto a su capacidad para evocar la sensación de brillo. Por ejemplo el flujo radiante del sol es aproximadamente constante entre $\lambda = 400 \text{ nm} - 700 \text{ nm}$, sin embargo la eficiencia relativa de diferentes longitudes de onda en condiciones de buena iluminación para evocar la sensación de brillo es diferente. Cantidades iguales de flujo radiante producen para distintas λ sensaciones visuales de brillo diferentes.

“Cuando el flujo luminoso proveniente de una fuente incide sobre una superficie (A), se dice que la misma está iluminada, y el flujo luminoso por unidad de superficie (F/m^2) se denomina

iluminancia (E). La unidad es el lux, equivalente a un lumen por metro cuadrado: $1 \text{ lux} = 1 \text{ lm/m}^2$, $E = F/A$ (con F incidiendo a 90° sobre A). Si se imagina a la fuente luminosa en el centro de una esfera, una pequeña área de la esfera subtiende un ángulo sólido definido por $\Omega = A/R^2$. Si por esta área pasa un flujo luminoso F , se define la intensidad luminosa en la dirección del área como $I = F/\Omega$. La unidad de medida de I es la candela (cd) equivalente a un lumen por estereorradián: $1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/sr}$ (Sears, 1960) (Ver Figura 5).



BIBLIOGRAFÍA

- ACEVEDO-DÍAZ, J. A., GARCÍA-CARMONA, A., DEL MAR ARAGÓN-MÉNDEZ, M., & OLIVA-MARTÍNEZ, J. M. (2017). Modelos científicos: significado y papel en la práctica científica-Scientific models: meaning and role in scientific practice. *Revista científica*, 3(30), 155-166.
- COSTA, V. A. (2018). Uso de dispositivos móviles y de software matemático en la enseñanza por investigación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 626-641.
- COSTA, V. A., Y ROSSIGNOLI, R. (2017). Enseñanza del Álgebra Lineal en una Facultad de Ingeniería: aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, 12(23), 49-55.
- CHEVALLARD, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182.
- GODINO, J. D., BATANERO, C., CAÑADAS, G. R., CONTRERAS, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Actas Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica*, Universidad de la Sabana, 249-269.
- LAY D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson Educación.
- NAVE, C. R. (2005). Hyper Physics. Report, ECE dept. Georgia State University.
- POZO MUNICIO, J. I., POZO, J. I. Y GÓMEZ CRESPO, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia: del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Ediciones Morata.
- SEARS, F. (1960). *Óptica: Fundamentos de Física, Parte III*. Madrid: Editorial Aguilar.
- STRANG, G. S. (1982). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano.